

FUVEST 2002

10/01/2002
Matemática

Q.01

Carlos, Luís e Sílvio tinham, juntos, 100 mil reais para investir por um ano. Carlos escolheu uma aplicação que rendia 15% ao ano. Luís, uma que rendia 20% ao ano. Sílvio aplicou metade de seu dinheiro em um fundo que rendia 20% ao ano, investindo a outra metade numa aplicação de risco, com rendimento anual pós-fixado. Depois de um ano, Carlos e Luís tinham juntos 59 mil reais; Carlos e Sílvio, 93 mil reais; Luís e Sílvio, 106 mil reais.

- a) Quantos reais cada um tinha inicialmente?
- b) Qual o rendimento da aplicação de risco?

Q.02

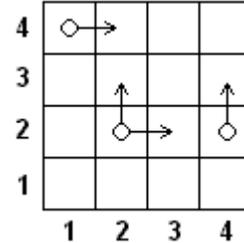
Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2m e 5m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

Q.03

Um tabuleiro tem 4 linhas e 4 colunas. O objetivo de um jogo é levar uma peça da casa inferior esquerda (casa (1, 1)) para a casa superior direita (casa (4, 4)), sendo que esta peça deve mover-se, de cada vez, para a casa imediatamente acima ou imediatamente à direita. Se apenas uma destas casas existir, a peça irá mover-se necessariamente para ela. Por exemplo, dois caminhos possíveis para completar o trajeto são $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 4)$ e $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 4)$.

a) Por quantos caminhos distintos pode-se completar esse trajeto?

b) Suponha que o caminho a ser percorrido seja escolhido da seguinte forma: sempre que houver duas opções de movimento, lança-se uma moeda não viciada; se der cara, a peça move-se para a casa à direita e se der coroa, ela se move para a casa acima. Desta forma, cada caminho contado no item a) terá uma certa probabilidade de ser percorrido. Descreva os caminhos que têm maior probabilidade de serem percorridos e calcule essa probabilidade.

**Q.04**

Sejam $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$ e $C = (-1, 3)$ os vértices de um triângulo e $D = (u, v)$ um ponto do segmento \overline{BC} . Sejam E o ponto de intersecção de \overline{AB} com a reta que passa por D e é paralela ao eixo dos y e F o ponto de intersecção de \overline{AC} com a reta que passa por D e é paralela ao eixo dos x .

a) Determine, em função de u , a área do quadrilátero $AEDF$.

b) Determine o valor de u para o qual a área do quadrilátero $AEDF$ é máxima.

Q.05

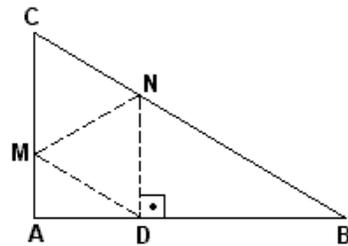
As raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + m$, onde m é um número real, estão em progressão aritmética. Determine

- o valor de m ;
- as raízes desse polinômio.

Q.06

O triângulo retângulo ABC , cujos catetos \overline{AC} e \overline{AB} medem 1 e $\sqrt{3}$, respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice C coincida com o ponto D do lado \overline{AB} . Seja \overline{MN} o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que \widehat{NDB} é reto, determine

- o comprimento dos segmentos \overline{CN} e \overline{CM} ;
- a área do triângulo CMN .



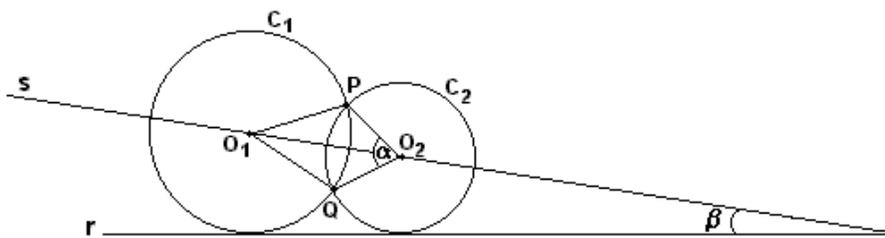
Q.07

Determine as soluções da equação $(2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$.

Q.08

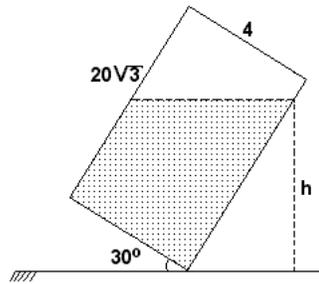
Na figura abaixo, as circunferências C_1 e C_2 , de centros O_1 e O_2 , respectivamente, se interceptam nos pontos P e Q. A reta r é tangente a C_1 e C_2 ; a reta s passa por O_1 e O_2 e β é o ângulo agudo entre r e s . Sabendo que o raio de C_1 é 4, o de C_2 é 3 e que $\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{5}$, calcule:

- a área do quadrilátero O_1QO_2P ;
- $\operatorname{sen} \alpha$, onde $\alpha = \widehat{QO_2P}$.



Q.09

Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4cm e altura $20\sqrt{3}$ cm, com $\frac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral abaixo). Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.

**Q.10**

São dados, na página ao lado, os pontos A e M e a reta s. Sabe-se que o ponto A é vértice de um paralelogramo ABCD; o lado \overline{AB} está na reta s; M é o ponto médio do lado \overline{BC} e o ângulo \widehat{CAB} tem medida 30° . Usando régua e compasso, construa esse paralelogramo. Descreva e justifique sua construção.



**ESTE CADERNO CONTÉM 10 (DEZ) QUESTÕES.
VERIFIQUE SE ESTÁ COMPLETO.
DURAÇÃO DA PROVA: 3 (TRÊS) HORAS.
É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE RÉGUA GRADUADA, ESQUADRO E COMPASSO.**

ATENÇÃO

VERIFIQUE SE NA PÁGINA DESTINADA À RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES 9 E 10
ESTÃO PRÉ-IMPRESSOS OS DADOS DA QUESTÃO 10.